ESTUDIOS

Revista **Complutense de Educación**
ISSNe: 1988-2793

EDICIONES COMPLUTENSE

http://dx.doi.org/10.5209/RCED.54880

Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas[1]

Belén Giacomone[2]; Juan D. Godino[3]; Miguel R. Wilhelmi[4]; Teresa F. Blanco[5]

Recibido: Enero 2017 / Evaluado: Abril 2017 / Aceptado: Mayo 2017

Resumen. Una enseñanza adecuada de las matemáticas requiere el conocimiento y la competencia de los profesores para identificar la variedad de objetos y significados involucrados en la resolución de tareas escolares. En este artículo se describe el diseño, la implementación y análisis retrospectivo de un proceso formativo dirigido a futuros profesores de matemáticas, centrado en desarrollar esta llamada competencia de análisis ontosemiótico. Para esto, se utilizan algunas herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. En esta experiencia, los futuros profesores primero resuelven tareas matemáticas sobre visualización y razonamiento diagramático; luego, analizan los objetos y significados puestos en juego en la resolución de cada tarea implementada. Además, las estrategias que los estudiantes producen en sus soluciones se discuten y comparten en entornos reales de clase. El análisis de los datos es cualitativo y está orientado a la identificación de *prácticas didácticas significativas* sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y progresos en el desarrollo de la competencia pretendida. Los datos se recogen de las respuestas escritas de los estudiantes, las notas del investigador observador y las grabaciones en audio de las clases. Los resultados revelan la complejidad involucrada en el desarrollo de esta competencia de análisis ontosemiótico, así como su relevancia para lograr una enseñanza de las matemáticas de alta calidad. Finalmente, el análisis retrospectivo del diseño formativo permite al profesor y al investigador reflexionar sobre cada uno de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y así, determinar mejoras potenciales para futuras implementaciones.
Palabras clave: análisis ontosemiótico; diseño de investigación; formación de profesores; prácticas matemáticas; visualización.

[en] Developing the onto-semiotic analysis competence of prospective mathematics teachers

Abstract. A suitable mathematics teaching requires the teachers' knowledge and competence for identifying the variety of objects and meanings involved in solving school tasks. This article describes the design, implementation and retrospective analysis of a formative cycle directed to prospective mathematics teachers, which is focused on developing this onto-semiotic analysis competence. For this, some theoretical and methodological tools of the Onto-Semiotic Approach to mathematical knowledge and instruction are used. In this experience, the prospective teachers first solve some visualisation and

[1] La investigación presentada en este artículo fue llevada a cabo como parte de los siguientes proyectos: EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerios de Economía y competitividad (MINECO, España).

[2] Universidad de Granada (España) belen.giacomone@gmail.com
[3] Universidad de Granada (España) jgodino@ugr.es
[4] Universidad Pública de Navarra (España) miguelr.wilhelmi@unavarra.es
[5] Universidad de Santiago de Compostela (España) teref.blanco@usc.es

diagrammatic reasoning mathematical tasks, and then analyse the objects and meanings put at stake in the resolution of each implemented task. In addition, the strategies that students produce in their solutions are discussed and shared in whole-class setting. The data analysis is qualitative oriented to identify *significant didactical practices* about the initial state of students' personal meaning, recognition of conflicts, and progress in developing the intended onto-semiotic analysis competence. For this purpose, the students' written responses, observer researcher's notes, and audio recordings on the class are used as a data collection instrument. The results reveal the complexity involved in developing this onto-semiotic analysis competence, as well as its relevance to achieve high quality mathematics teaching. Finally, the retrospective analysis of the formative design carried out allows the teacher, and researcher reflecting on each of factors that condition the teaching processes, and thus determining potential improvements for future implementations.
Keywords: onto-semiotic analysis; research design; pre-service teacher education; mathematical practices; visualization.

Cómo citar: Giacomone, B.; Godino, J.D.; Wilhelmi, M.R.; Blanco, T.F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación,* 24 (1), 35-52.

1. Introducción

Un problema importante en educación matemática consiste en dilucidar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que tiene, o que debería tener, el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea docente de manera adecuada (English, 2008; Mason, 2016). Tener conocimiento matemático no garantiza su desempeño profesional, "no solo es importante saber qué matemáticas conocen los profesores sino también cómo las conocen y qué son capaces de movilizar para la enseñanza" (Chapman, 2014, p. 295). Sin duda, caracterizar el conocimiento didáctico-matemático es un tema de investigación relevante, entre otras razones, porque hay conocimiento limitado sobre él (Silverman & Thompson, 2008, p. 499) que se viene gestando a la luz de diversas orientaciones teóricas.

Así, la acción del profesor involucra conocimientos, habilidades, creencia, valores, motivación y meta-cognición (Schoenfeld, 2010). Al mismo tiempo, la noción de competencia se ha instalado en el ámbito de la educación matemática generando un gran impacto en el desarrollo curricular, la práctica de la enseñanza y la evaluación, donde se habla con frecuencia de enseñar por competencias (Nitsch et al., 2015, p. 659). Para el caso de la formación de profesores Vázquez-Cano (2016, p. 1062) señala la necesidad de intervenir desarrollando metodologías más activas y funcionales que le permitan al profesorado planificar, coordinar y evaluar competencias claves. Asimismo, se considera necesario centrar la atención en el desarrollo de competencias de análisis y reflexión sobre la práctica docente, junto con el conocimiento especializado sobre los contenidos a enseñar (Husu, Toom, & Patrikainen, 2008; Pochulu, Font, & Rodríguez, 2016).

Diversos autores desarrollan herramientas y estrategias para promover el análisis y reflexión del profesor sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; brindan herramientas que permiten al profesor ser competente para describir, explicar y valorar, de manera sistemática, su propia práctica, (Llinares & Krainer, 2006; Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015). En estos trabajos se reconoce que el profesor debe tener conocimientos matemáticos y didácticos, pero también debe ser competente en el uso de esos conocimientos.

En este artículo se describe una experiencia con futuros profesores de matemáticas centrada en el desarrollo de la *competencia de análisis ontosemiótico*, esto es, el conocimiento y capacidad para identificar y describir los objetos y procesos implicados en tareas matemáticas escolares. Siguiendo a Font (2011, p. 18) se toma como indicador de competencia "una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad".

La sección 2 describe el problema y marco teórico. La sección 3 presenta el diseño formativo junto con el análisis a priori de una de las tareas implementadas. En la sección 4 se discuten los resultados. En la sección 5 se valora el proceso didáctico, es decir, se realiza un análisis retrospectivo del mismo. Finalmente, se reflexiona sobre la importancia educativa de esta investigación.

2. Marco teórico y problema de investigación

En esta investigación se aplican al campo de la formación de profesores de matemáticas de educación secundaria, algunas de las herramientas teóricas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos. El EOS es un sistema teórico inclusivo para la educación matemática desarrollado por Godino y colaboradores (Godino, Batanero, & Font, 2007; Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017; Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015). La visión antropológica (Wittgenstein, 1953), pragmatista y semiótica (Peirce, 1958) sobre el conocimiento didáctico-matemático asumida por el EOS se ha concretado en una manera de concebir y analizar la actividad matemática con claras consecuencias para la educación matemática. Se asume que las matemáticas provienen de la actividad humana orientada a la resolución de determinado tipo de problemas, los cuales constituyen la razón de ser y el significado de los objetos emergentes de la misma. En consecuencia las nociones de práctica matemática y sistema de prácticas constituyen el punto de partida para el análisis de la actividad matemática (Font, Godino, & Gallardo, 2013).

En las prácticas matemáticas, o sistema de prácticas matemáticas, (acciones realizadas por un sujeto para resolver un problema), participan y emergen distintos tipos de objetos primarios matemáticos, los cuales según su naturaleza y función son clasificados en las siguientes categorías:

- lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.);
- situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios);

— conceptos-definición, introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función);
— proposiciones (enunciados sobre conceptos);
— procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
— argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando *configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos* (Figura 1).

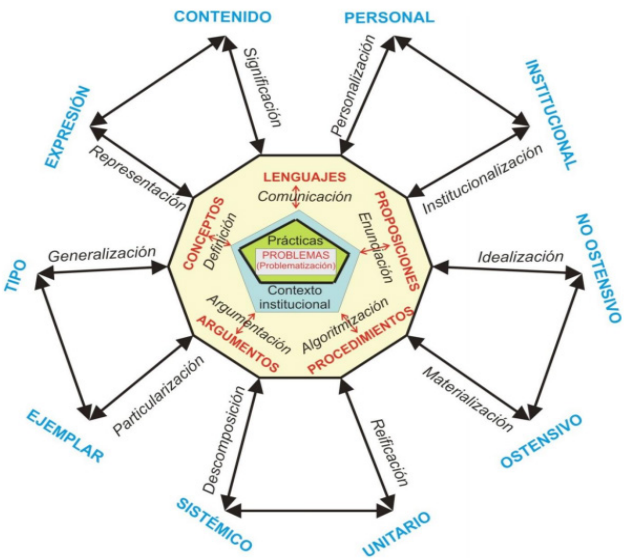


Figura 1. Configuración ontosemiótica (Font et al., 2013, p. 117)

Se trata de una modelización del conocimiento matemático que permite describir y comprender los procesos de construcción del conocimiento basado en la resolución de problemas. Aplicada al caso del aprendizaje matemático escolar, permite analizar y comprender el proceso de resolución de las tareas seleccionadas (análisis epistémico *a priori*) y prever conflictos potenciales de aprendizaje. Asimismo, permite desvelar algunas posiciones ingenuas sobre el papel de las representaciones materiales (visualizaciones, diagramas, manipulativos) en el aprendizaje matemático al facilitar el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre los diversos tipos de representaciones y los objetos no ostensivos necesariamente involucrados.

En las fases de implementación y evaluación de aprendizajes, el análisis ontosemiótico de las respuestas dadas por los estudiantes (análisis cognitivo *a posteriori*) proporciona información para gestionar los procesos de explicación e institucionalización y valorar los conocimientos logrados respecto de los conocimientos pretendidos.

En investigaciones previas (Batanero, Contreras, Díaz, & Sánchez, 2015; Font & Ramos, 2005; Pino-Fan, Godino, & Font, 2016) se ha iniciado el estudio de las posibilidades y retos ofrecidos por la aplicación de las herramientas del EOS al campo de la formación de profesores de matemáticas. Se asume que los profesores de matemáticas deben desarrollar la *competencia específica de análisis e intervención didáctica*, entendida como la capacidad de abordar los problemas propios de su profesión. Esto implica que el profesor debe conocer y saber usar las herramientas conceptuales y metodológicas pertinentes que le ayuden a planificar, describir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La mencionada competencia de análisis didáctico se puede descomponer en otras sub-competencias, las cuales se pueden identificar ligadas al uso de herramientas específicas que hacen posible el abordaje de los problemas didácticos. Así, en el marco del EOS, el uso de la herramienta *configuración ontosemiótica* implica el desarrollo de la sub-competencia de *análisis ontosemiótico,* mediante la cual el profesor está capacitado para describir y explicar las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver problemas y estudiar los contenidos matemáticos pretendidos. Este proceso analítico-reflexivo se puede interpretar como una actividad metacognitiva, ya que se realiza sobre los conocimientos puestos en juego en las prácticas matemáticas, o sea, se trata de una reflexión sobre la cognición, una meta-cognición (D'Amore, Font, & Godino, 2007).

Esta visión ontosemiótica del conocimiento matemático plantea la siguiente cuestión con relación a la formación de profesores: ¿Cómo desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico de la actividad matemática en los profesores? En las secciones siguientes se describe una intervención formativa, como primer paso para responder a dicha pregunta.

3. Método: Diseño formativo

3.1. Contexto

La intervención formativa se ha desarrollado en el marco de un máster de formación de profesores de matemáticas de educación secundaria. Los estudiantes son futuros profesores, sin experiencia en docencia; más de la mitad de ellos son licenciados en matemática y el resto ingenieros o arquitectos.

La experiencia se aplicó en un ambiente real de clase, con un enfoque propio de las investigaciones basadas en el diseño (Kelly, Lesh, & Baek, 2008). En este sentido, se planifican ciclos formativos que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia. Asimismo, tras cada implementación, el equipo investigador está comprometido en realizar un proceso de reflexión iterativa que le permita re-adaptar el diseño inicial, en caso que fuese necesario (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016, p. 482)

Un primer ciclo se implementó como prueba piloto (año 2015) con 54 estudiantes durante 3 sesiones de dos horas cada una. Un segundo ciclo se implementó en el año 2016 con 52 estudiantes divididos en dos grupos, uno de 27 y otro de 25; se utilizaron también 3 sesiones. En este trabajo usaremos la información recogida en el segundo ciclo a partir de las anotaciones del observador/investigador (primer autor) y las respuestas escritas de los estudiantes; asimismo, las clases implementadas fueron grabadas en audio, siendo una ayuda complementaria para los investigadores al permitirles reconstruir hechos concretos que han sido registrados previamente. De este modo, el análisis de los datos es cualitativo y está orientado a la identificación de prácticas didácticas significativas sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

En términos de Mason (2016), este tipo de acción formativa, basada en el diseño de tareas para la formación profesional, es necesaria porque “permite a los docentes el acceso a enriquecer tanto su repertorio de acciones pedagógicas como el discurso que utilizan para justificar esas acciones” (p. 225).

3.2. Fases de implementación

La primera fase implementada refiere a *la exploración inicial de significados personales* que tienen los estudiantes sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, así como su capacidad para el reconocimiento de dichos objetos en las prácticas matemáticas. Los estudiantes trabajaron de manera individual con la tarea 1 (Anexo 1); seguidamente se presentaron y discutieron las respuestas dadas por los estudiantes.

En la segunda fase se propuso la lectura y discusión de un documento específico sobre el papel de la visualización en educación matemática (Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi, & Contreras, 2015), que incluía un ejemplo del tipo de análisis que se pretende realizar. Seguidamente, se implementaron dos tareas trabajando en equipos, seguidas de su presentación y discusión. En la tarea 2 (Anexo 2) se les pedía a los estudiantes justificar un procedimiento utilizado por un alumno para construir un cuadrado con GeoGebra. En la tarea 3 (Anexo 2) se les daba a los estudiantes un problema sobre fracciones y una solución aportada por un alumno basada en una secuencia de diagramas de áreas; la consigna era: analizar dicha solución.

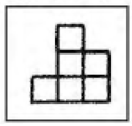
En la tercera fase, los estudiantes trabajaron de manera individual a partir de la tarea 4 basada en una demostración del teorema de Pitágoras y se consideró como un instrumento de evaluación final.

Los problemas se seleccionaron de tal manera que pusieran en juego visualizaciones y razonamiento con diagramas con el fin de provocar la reflexión sobre la dialéctica entre los objetos ostensivos y no ostensivos implicados en las prácticas matemáticas.

3.3. Tarea 1

En el Anexo 1 se incluyen las consignas elaboradas para indagar tanto los significados personales de los estudiantes sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, como el nivel inicial de competencia de análisis ontosemiótico. A continuación, se muestra el análisis *a priori* (análisis epistémico) de la tarea 1, el cual fue usado para apoyar la puesta en común de las respuestas elaboradas individualmente por los estudiantes. La Tabla 1 resume la configuración de objetos y significados involucrada en la resolución de la tarea; se puede observar que tanto el enunciado como la resolución de la tarea son descompuestos en unidades de análisis que hemos enumerado de 1) a 7).

Tabla 1. Análisis ontosemiótico de la tarea inicial (Dibujo en perspectiva)

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Significados referidos en las prácticas *(Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
Planteamiento de la tarea; interpretación de una perspectiva isométrica de un objeto físico tridimensional.	1) La siguiente figura muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha. Dibuja la vista del edificio desde atrás. 	*Conceptos*: perspectiva isométrica de un objeto 3-D; punto de vista (o foco); puntos de vista opuestos; proyección ortogonal; plano de proyección; rectas proyectantes; rayo visual; cubo; composición de cubos; cuadrado; sistema de referencia 3-D; frente, arriba, derecha; objeto visible, objeto oculto.
Inducir la elaboración de una justificación de la respuesta requerida.	2) Justifica la respuesta.	*Concepto de justificación* de una proposición geométrica (como convencimiento, a sí mismo y al otro, de la corrección de una respuesta).
Respuesta a la tarea solicitada.	3) La vista desde atrás debe ser la figura adjunta. 	*Concepto*: vista de alzado (trasero). *Procedimiento*: recuento de cubos por filas y columnas. *Proposición 1*: la vista de atrás es la figura adjunta.
Se establece una hipótesis fundamental para poder dar una respuesta racional a la tarea y se evoca una propiedad de las proyecciones ortogonales.	4) Suponiendo que las piezas dibujadas en perspectiva son cubos, las proyecciones ortogonales de las caras son cuadrados.	*Concepto*: cubo; proyección ortogonal; cuadrado. *Proposición 2*: las proyecciones ortogonales de un cubo son cuadrados si se mira frontalmente.
Se evocan propiedades de las proyecciones ortogonales necesarias para justificar deductivamente la respuesta a la tarea.	5) Las proyecciones ortogonales conservan la forma, tamaño y posición relativa de los objetos proyectados.	*Argumento*: justificación de la proposición 2. *Conceptos*: forma, tamaño y posición relativa.
Se describen las posiciones relativas de las piezas que componen la construcción para justificar la forma de la proyección plana desde atrás.	6) Si me pongo atrás del edificio, a mi izquierda vería un solo cubo, al centro tres cubos apilados y a mi derecha dos cubos apilados, porque en la perspectiva isométrica dada a la derecha-atrás hay un cubo, en medio-atrás hay 3 cubos y en la izquierda-frente hay 2.	Conceptos: atrás, izquierda, centro y derecha. *Proposición y su argumentación* basada en los datos de la tarea.
Se evoca una propiedad previamente establecida para justificar la respuesta final.	7) Como las proyecciones ortogonales de las caras del cubo son cuadrados la vista del objeto debe ser la dada en la práctica 3).	*Argumentación* que justifica la proposición 1.

El objetivo de este trabajo no es incluir un análisis epistemológico más completo de la trama de funciones semióticas implicadas en las prácticas; sin embargo, a continuación, se ejemplifican algunos.

3.3.1. Procesos de particularización-generalización

En la tarea se da una vista particular de un objeto espacial y se pretende que se razone sobre el objeto en su totalidad. La solución de la tarea es la misma cualquiera que sea el tamaño y posición ortogonal de los diagramas, aunque es dependiente de la forma en que se compone el cuerpo espacial al que la tarea hace referencia. De esta manera, la proposición 2 y su argumentación, deben ser interpretadas de manera general, para cualquier cubo. La tarea admite múltiples variantes, por ejemplo cambiando la composición del objeto real representado; o bien se puede pedir la construcción y el reconocimiento de las diferentes vistas. Es una tarea prototípica de los problemas de representación en el área de dibujo técnico y geometría descriptiva.

3.3.2. Procesos de materialización-idealización

La tarea muestra la representación material en la hoja de papel de un objeto real (el edificio) ideal (imaginado). Esta representación en perspectiva isométrica se refiere a la vista que un observador hipotético tendría del edificio ideal. Este tipo de perspectiva tiene la ventaja de permitir la representación a escala, y la desventaja de no reflejar la disminución aparente de tamaño que percibe el ojo humano. El dibujo del edificio es entonces una materialización de un objeto ideal: la vista de un edificio que tendría un hipotético observador. Los dibujos (en proyecciones isométricas y ortogonales) pueden ser interpretados cómo materializaciones de objetos ideales (composiciones de cubos) que facilitan la realización de las "acciones matemáticas" (reconocer las vistas) que se realizan sobre ellos.

3.4. Tareas instruccionales complementarias

La instrucción ontosemiótica para cada tarea implementada en la segunda y tercera fases (Anexo 2), se incluyen a continuación:

- **a)** Resuelve la tarea.
- **b)** Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas.
- **c)** Identifica los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y cada una de las prácticas elementales, completando la tabla incluida a continuación (añade las filas necesarias).

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Significados referidos en las prácticas *(Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

- **d)** Además de los procesos de significación indicados en la tabla anterior, identifica otros procesos matemáticos que están involucrados en la resolución de la tarea.

4. Resultados

Las observaciones y anotaciones durante el desarrollo de la intervención, y el análisis de respuestas elaboradas por los estudiantes (futuros profesores) han permitido extraer algunas conclusiones sobre las dificultades de comprensión de las consignas, los logros alcanzados y las posibilidades ofrecidas por el diseño formativo. Dada la naturaleza interpretativa de la investigación, se discuten a continuación los resultados de cada tarea a partir de algunas respuestas prototípicas.

4.1. Discusión de la Tarea 1: Exploración inicial de significados personales

Durante el desarrollo de la primera fase de trabajo individual, los estudiantes no tenían claro cuál era la naturaleza de los objetos matemáticos primarios y sus significados. Dado el proceso de visualización que involucra el enunciado (perspectiva frente-derecha del edificio) y su solución (dibujo de la vista desde atrás) los estudiantes se han centrado en los objetos visuales perceptivos. Por ejemplo, reconocen como conceptos intervinientes y emergentes en la resolución: cubo, cuadrado, volumen, altura, giro, sistema de referencia, (…), pero ningún alumno refiere por ejemplo a las proyecciones ortogonales.

La noción de proposición resulta conflictiva en esta tarea; por ejemplo el estudiante **E1** sugiere que una proposición es un supuesto del que se parte; para el estudiante **E2**, la tarea es muy sencilla de resolver ya que la representación visual de la solución no contiene matemáticas.

> **E1.** La única proposición es la asunción de que las piezas son cúbicas.
> **E2.** Las proposiciones se aplican para demostrar teoremas. Esta resolución no tiene demostración, es simplemente dibujar lo que uno ve (…) Es un problema de dibujo técnico, no de matemáticas.

Los conflictos identificados se reflejaron en la puesta en común siendo un vehículo para manifestar, discutir y compartir la manera de entender dichas entidades y el papel que desempeñan en la práctica matemática resolutiva. El objetivo era que los estudiantes compartieran la visión pragmatista y antropológica sobre el conocimiento matemático que postula el EOS, según la cual un concepto se concibe como una entidad funcional (que desempeña un papel en la práctica matemática), cuyo significado es fijado por una regla o definición; y una proposición es un enunciado al que se debe asignar un valor lógico de verdadero o falso.

En la consigna seis de esta tarea (Anexo 1), se les pide a los estudiantes que elaboren al menos dos definiciones diferentes para cubo como concepto geométrico, lo cual causó cierto desconcierto en muchos estudiantes, por ejemplo:

> **E3.** Existe un solo cubo geométrico, por lo tanto tiene una única definición.

Luego, se pide a los estudiantes que indiquen otros usos o significados en contextos no geométricos asociados a la palabra cubo. Esto representó un reactivo para explicitar la diversidad de significados que puede tener un concepto o una proposición dependiendo del contexto en el que participan, así como aspectos relativos al lenguaje, tales como la polisemia o la homonimia.

Otro aspecto importante a destacar es la dialéctica compleja que existe entre los objetos ostensivos (representaciones) y no ostensivos (inmateriales, mentales o ideales) que se manifiesta en los diálogos registrados; así, por ejemplo los estudiantes **E4** y **E5** responden a la pregunta del profesor *¿Qué propiedades del cubo no se pueden representar empíricamente?* de la siguiente manera:

> **E4.** Todas las propiedades del cubo se pueden representar empíricamente, menos las caras que están por detrás. Por ejemplo (señala el dibujo): esto es un cubo y lo estoy representando empíricamente; éstas son las aristas, éstas son las caras, (…).
> **E5.** Habría que medir las aristas y calcular las distancias entre caras opuestas. De esta manera se puede comprobar que, si son iguales, entonces es posible representarlo empíricamente.

La dualidad ostensivo-no ostensivo tiene un papel esencial en el EOS, ya que la actividad de producción y comunicación matemática no se puede realizar sin el concurso sinérgico entre ambos tipos de objetos (Font et al., 2013). Esta reflexión es necesaria porque le permite a los futuros profesores tomar conciencia de que tales objetos son entendidos como las reglas de uso de los lenguajes visuales o analíticos que los representa.

En la última cuestión planteada, se les pide a los estudiantes que enuncien la misma tarea utilizando solamente lenguaje natural. La mayoría de los alumnos no supo expresar esta respuesta de manera correcta. Esto permitió discutir sobre los usos y limitaciones de los distintos lenguajes, reconociendo las posibilidades epistémicas y cognitivas de los medios visuales de expresión. De esta manera, el diálogo y la interacción cobran un papel clave en la intervención formativa.

4.2. Discusión de la Tarea 2: Construcción de un cuadrado con GeoGebra

Durante la resolución en equipos de la tarea 2 se ha podido constatar que los estudiantes fueron capaces de identificar todos los conceptos y procedimientos implicados en la respuesta; sin embargo, se evidencian casos en donde la noción de proposición sigue siendo confusa, por ejemplo, un estudiante identifica como proposición: *la definición de cuadrado*; es claro que la definición de cuadrado no es ni verdadera ni falsa.

En la puesta en común de esta tarea se ha podido compartir que para que el estudiante realice una verdadera actividad matemática es necesario pedirle la justificación del procedimiento basado en el uso del software, ya que de ese modo debe explicitar los conocimientos matemáticos implicados en la resolución. El uso de los procedimientos que permite GeoGebra, tal como se muestra en el enunciado de la tarea 2, no requiere poner en juego, de manera explícita, proposiciones, ni las definiciones y propiedades de los objetos geométricos, quedando enmascaradas sus características de conceptos figurales (Fischbein, 1993). Se requiere la acción del profesor solicitando la justificación explícita de que la secuencia de pasos pone en juego los conceptos y propiedades que garantizan la validez de los enunciados. Por ejemplo, en la Figura 2, el segmento AC es congruente con AB, no porque "se ven en la pantalla de igual longitud" sino porque es el radio de la circunferencia con centro A y radio AB, y todos los radios de una circunferencia son congruentes entre sí. Necesariamente el cuadrilátero ABCD es un cuadrado porque se cumplen las condiciones de su definición: los cuatro ángulos son rectos y los cuatro lados congruentes. "Un cuadrado no es una imagen construida. Es una forma controlada por su definición (aunque puede ser inspirado por un objeto real)" (Fischbein, 1993, p. 141).

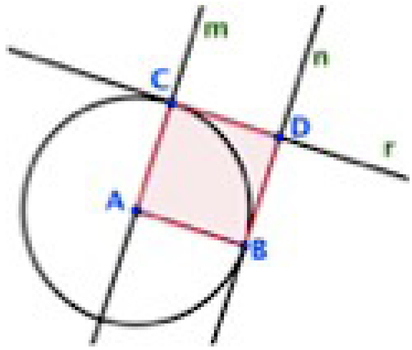


Figura 2. Construcción de un cuadrado con GeoGebra (Tarea 2, Anexo 2)

Este planteamiento es compartido no solo para el uso de GeoGebra, sino también para el trabajo matemático con representaciones y visualizaciones en general. Como afirma Sherry, lo que importa más que construir un diagrama preciso es el conocimiento matemático implicado, el cual no está visible por ningún sitio; no está en los propios diagramas. "Cuando los estudiantes son incapaces de reconocer el conocimiento no es por deficiencias en los diagramas construidos sino en su incapacidad para comprender el sistema de relaciones conceptuales relevantes" (Sherry, 2009, p. 68).

Shin y Lemon (2008), plantean como cuestión central, el problema de la generalidad:

> El diagrama que aparece en una demostración de Euclides proporciona, un ejemplar único del tipo de configuraciones geométricas a las que se refiere la demostración. No obstante las propiedades que parecen cumplirse en el diagrama son tomadas como que se cumplen en todas las configuraciones del tipo dado. ¿Qué justifica este salto de lo particular a lo general? (Shin & Lemon, 2008, sec. 4.1)

Por último, el uso de GeoGebra como parte de la tarea es un aspecto positivo que permite reflexionar sobre los procesos de *particularización* (concreción de los conceptos a las figuras particulares) y *generalización* (las figuras concretas son representantes de una familia de figuras semejantes) a través de las diferentes funciones de uso (Pierce & Stacey, 2013, p. 327; Fahlgren & Brunström, 2014, p. 287).

4.3. Discusión de la Tarea 3: Fracciones y diagrama de áreas

Con el desarrollo de la tarea 3 (Anexo 2), se trata de que los futuros profesores analicen una solución dada por un alumno (Figura 3) a un problema sobre fracciones. La reflexión sobre las acciones matemáticas realizadas es un componente clave ya que "no se trata solo de lo que uno hace, sino también por qué lo hace" (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008, p. 348).

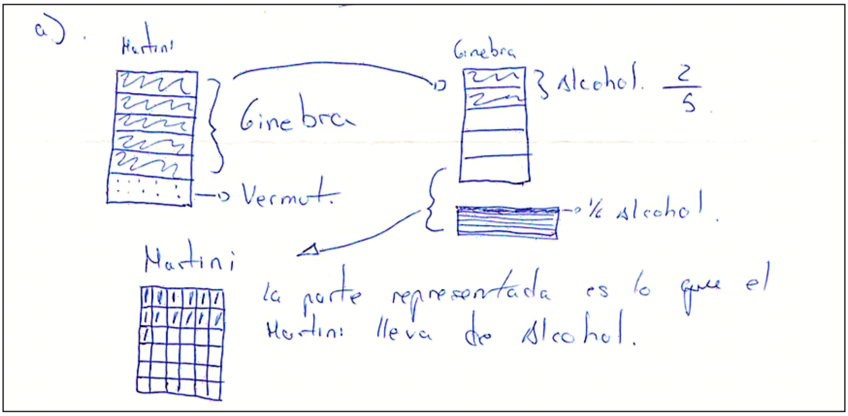
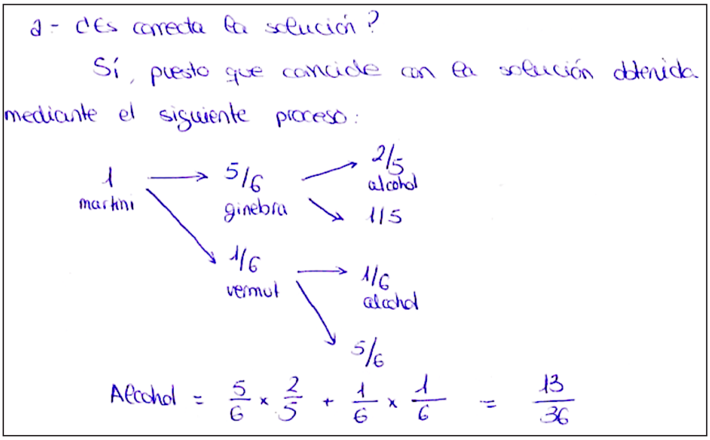


Figura 3. Solución dada por un alumno (Tarea 3, Anexo 2)

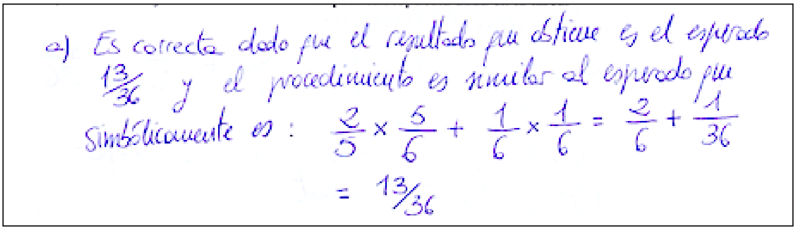
Las respuestas que los estudiantes en formación dieron a esta tarea, indican algunos avances en el reconocimiento y la identificación de los diferentes objetos involucrados en la tarea, es decir, el análisis de su competencia ontosemiótico. EL sujeto que resuelve la tarea, basando su razonamiento en el uso de diagramas de áreas, lleva a cabo procesos de materialización de los conceptos y de las operaciones con fracciones implicadas en el enunciado. Finalmente, la solución es encontrada mediante un procedimiento aritmético de conteo de unidades de fracciones, representadas en el último diagrama de la Figura 3 mediante un proceso de idealización. Sin embargo, la parte de *justifica la respuesta* no resultó fácil, obteniendo como resultado, un ambiente de discusión adecuado para confrontar ideas.

En general, los participantes resuelven el problema utilizando otros diagramas y luego, comparan los resultados obtenidos con la solución de la Figura 3. No son capaces de elaborar una justificación apoyándose en el diagrama de áreas, ya que representar la suma y multiplicación de fracciones con este tipo de representaciones, requiere un trabajo matemático poco habitual. Radford (2003, p. 43) pone de manifiesto el problema de la imposibilidad de cualquier acceso directo a los objetos matemáticos y la consiguiente necesidad de medios para que resulten *perceptibles*. De esta manera, los estudiantes necesitan recurrir a otros tipos de lenguajes, como se ejemplifica con las respuestas siguientes:

E_6.



E_7.



Cada uno de estos procedimientos utilizados para resolver el problema moviliza objetos matemáticos diferentes; esto genera consecuencias importantes si el objetivo es analizar la actividad matemática implicada en una respuesta dada (en un procedimiento determinado).

Varios autores en el campo de la formación de profesores han discutido la resolución de este tipo de tareas sobre fracciones. Por ejemplo, Cohen (2004) utiliza un problema sobre multiplicación y división de fracciones proponiendo el uso de diversos diagramas, con maestros en ejercicio. La autora muestra el verdadero desafío que implica la justificación de la resolución de estos problemas, y señala que el uso de los distintos tipos de diagramas es una oportunidad para llamar a la *reflexión profesional*.

A propósito de las respuestas **E6** y **E7**, se comparte en clase el papel de los diagramas en el razonamiento matemático, desde una perspectiva Wittgeinsteiniana. Se observa que el significado del *concepto de fracción* que se moviliza de acuerdo al diagrama que se use, es diferente. En el de áreas (Figura 3) la fracción interviene como operador de una cantidad de área, mientras que en el diagrama en árbol **(E6)** la fracción es la razón entre las partes de un todo genérico que se divide en partes iguales y las partes que se individualizan. Además, los procedimientos involucrados en diagramas de áreas tienen rasgos de menor generalidad que en el diagrama en árbol.

Al igual que en la tarea anterior, se insiste en el papel fundamental que tienen las justificaciones en el uso de situaciones diagramáticas; de manera concreta las acciones realizadas con el diagrama del Martini (respuesta del alumno), son explicativas del proceso de resolución para alguien que conoce las convenciones asumidas, así como los objetos no ostensivos implicados. Sin embargo, es necesario que el resolutor se apoye en una secuencia de prácticas discursivas y operativas que permita justificar y explicar dichas acciones.

4.4. Discusión de la Tarea 4: Teorema de Pitágoras

Si bien hay una observación y evaluación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes, la tarea 3 utilizada como evaluación final del proceso de estudio (Anexo 2). Para favorecer la reflexión, el trabajo autónomo y la responsabilidad en el estudio, se planifica el plazo de una semana para que los estudiantes entreguen la resolución de la misma.

El análisis de las respuestas permite observar que los estudiantes han sido capaces de identificar los conceptos y los procedimientos implicados en las prácticas matemáticas. Sin embargo, persisten las dificultades con las nociones de argumento y proposición resultando compleja su identificación. A continuación se muestran algunos casos concretos como ejemplos prototípicos de respuestas; estas confusiones ya se habían manifestado en la tarea inicial:

> **E8.** Proposición: partimos del supuesto que las figuras sombreadas son cuadrados y triángulos rectángulos.
> **E9.** Proposición: definición de área de un cuadrado.

El comentario de un estudiante, se refiere al uso (significado) que se le asigna al término proposición en las tareas, permite reflexionar sobre la importancia de aplicar herramientas que promuevan el desarrollo de competencias específicas de un profesor de matemáticas:

> **E10.** En todas las tareas he tenido una dificultad con el término proposición puesto que se refería a resultados concretos del ejercicio, y desde el punto de vista matemático una proposición es algo que siempre se cumple y tiene una demostración.

Este estudiante está condicionado por el uso que se hace en las clases de matemáticas universitarias, y en los textos correspondientes, de los términos *proposición, propiedad y teorema*. En ese contexto, la matemática es un producto terminado, un sistema de conceptos y proposiciones demostradas. Esta concepción puede impedir comprender la actividad que realiza un matemático, sea un profesional académico o un escolar, cuando se enfrenta a un problema. La práctica matemática comprende, no solo los momentos finales de sistematización y generalización de los resultados, sino que incluye también los momentos de indagación, de ensayos, pruebas y refutaciones, en los cuales el estudiante trata de formular los enunciados y aportar argumentos sobre su verdad o falsedad.

El tipo de análisis que se ha implementado, esto es, el reconocimiento y la gestión de los conocimientos en la realización de las tareas, permite que el futuro profesor, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y tome consciencia de la diversidad de significados que se les atribuye en el contexto específico.

5. Idoneidad de la intervención formativa: análisis retrospectivo

En esta sección se utiliza la noción de idoneidad didáctica, con su sistema de criterios, componentes e indicadores (Godino, Batanero, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2016) para reflexionar y valorar la experiencia docente descrita anteriormente. Estos criterios se clasifican en seis facetas, las cuales caracterizan los procesos de enseñanza y aprendizaje: la faceta epistémica (significados institucionales matemáticos), ecológica (contexto socio-profesional y curricular), cognitiva (significados personales), afectiva (factores emocionales), interaccional (interacciones personales) y mediacional (recursos didácticos).

Con la finalidad de recoger información adicional para este análisis, los estudiantes tenían que cumplimentar una encuesta de opinión anónima sobre los siguientes aspectos, para cada tarea:

1) Claridad de la tarea y de las consignas.
2) Adecuación de la metodología seguida (forma de trabajo, explicaciones del profesor).
3) Grado de motivación e interés suscitado por las actividades.
4) Nivel de aprendizaje logrado.
5) Grado de pertinencia global del taller para tu formación como profesor de matemáticas.

Cada ítems debía ser valorado según una escala de [1-5], siendo 1: valor mínimo y 5: valor máximo. Además, los estudiantes podían añadir cualquier comentario pertinente.

A continuación, se utiliza la guía de reflexión descrita por Godino (2013) para evaluar cada faceta, incluyendo los resultados de la encuesta.

5.1. Idoneidad epistémica y ecológica

Se han propuesto tareas que requieren poner a funcionar diversos modos de expresión matemática (verbal, visual y simbólica), incluyendo situaciones donde el alumno tiene que argumentar, interpretar y representar. Sería deseable incorporar variaciones en las consignas y generar relaciones entre los diversos contenidos. La actividad de *resolver problemas*, provoca que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos para dar respuesta a la pregunta, ¿qué matemáticas se pone en juego en la resolución de la tarea? La respuesta a esta pregunta, se concreta con la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos; esto es, la competencia de análisis ontosemiótico de los futuros profesores.

La lectura propuesta introduce a los estudiantes en el uso de la herramienta *configuración de objetos y procesos;* además, analiza la importancia del razonamiento visual para enfatizar la dialéctica entre las facetas ostensiva-no ostensiva de los objetos matemáticos. A pesar de ello, el lenguaje involucrado en el documento no ha resultado claro respecto a su formación previa.

Por otro lado, la acción formativa implementada es coherente con los objetivos del contexto institucional dado que se trata de futuros profesores y por lo tanto, se debe asegurar su competencia para su desarrollo profesional. Asimismo, se trata de innovación basada en la práctica reflexiva, siendo una actitud favorable hacia el desarrollo profesional del profesor (Godino, 2013; Pochulu et al., 2016; Ponte, Mata-Pereira, Quaresma, & Velez, 2017).

5.2. Idoneidad interaccional y mediacional

Al inicio de cada sesión, el profesor recuerda los objetivos de la clase y hace una presentación adecuada del tema. Las explicaciones e institucionalizaciones están apoyadas en el uso de diapositivas que permiten gestionar el tiempo y sistematizar los conocimientos pretendidos.

El trabajo grupal favoreció el diálogo y comunicación entre los estudiantes, "siendo un aspecto positivo que contribuye mejor al aprendizaje de los alumnos" (Escobar, Romero, & Mier, 2015, p. 269). El profesor y observador tuvieron un rol activo con el fin de generar reactivos en los participantes y obtener información relevante. Por ejemplo, el pequeño fragmento **E4** y **E5** permiten sacar a la luz los conocimientos previos de un grupo de estudiantes sobre la naturaleza del objeto geométrico cubo.

En la puesta en común los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar, aspectos valorados positivamente por los propios participantes, al igual que destacan Ponte et al. (2017, p. 21) en sus resultados con futuros profesores; asimismo, la mayoría de ellos participa en la discusión de las respuestas.

El factor tiempo es quizás el recurso más importante que ha de considerarse para una gestión adecuada, pero sin duda, dada la complejidad que requiere este tipo de competencia, no ha resultado suficiente; "el uso de una herramienta compleja como es la configuración epistémica/cognitiva de objetos primarios necesita de un tiempo de apropiación más largo y probablemente, de un proceso de instrucción específico y sostenido a lo largo de varias sesiones" (Pochulu et al., 2016, p. 90). La investigación está condicionada por el ambiente real de clase, propio de las investigaciones de diseño. Por ejemplo, las respuestas de la evaluación formativa final no tuvieron lugar de discusión en el aula; sería necesario incorporar momentos de reflexión sobre las dificultades detectadas e incorporar el diálogo y la negociación de significados.

El uso de recursos manipulativos y tecnológicos son aspectos que deben mejorarse. Los siguientes comentarios recuperados de la encuesta, permiten avanzar en esta dirección:

- [tarea 1] "incorporar materiales manipulativos (tecnológicos, dada su presencia en las aulas de hoy) que permitan resolver la tarea y analizar otros procedimientos posibles".

5.3. Idoneidad cognitiva y afectiva

En el desarrollo de la *primera fase* los alumnos tuvieron muchas dificultades para el reconocimiento de objetos y significados, manifestando la complejidad del análisis; esto no es de extrañar dado que se trata de estudiantes con un amplio conocimiento matemático *per-se* y poco conocimiento didáctico (especializado) (Godino et a., 2017). Es posible encontrar comentarios en la encuesta que reflejan esta idea, relacionada con la baja idoneidad cognitiva *a priori* y la baja idoneidad afectiva:

- "Era necesario instruir previamente sobre: que se entiende por concepto, proposición, argumento".
- "La lectura era difícil de comprender así de primeras, y no comprendí el lenguaje específico".

Para las demás tareas se observa un progreso cognitivo-afectivo; los estudiantes toman conciencia de progresar en su desarrollo profesional:

- "La tarea 2 me ha resultado motivadora: desde una acción simple como la 'construcción de un cuadrado' es posible crear una situación de verdadero aprendizaje, lo cual también implica un gran desafío para nosotros, los profesores (…)"

Respecto a la tarea 3, al igual que los resultados señalados por Pochulu y cols. (2016), los participantes manifiestan la importancia en el dominio de herramientas que ayuden a comprender dificultades de aprendizajes:

- "Me pareció muy interesante analizar la forma de respuesta de un alumno ante un problema dado. Nunca me lo hubiera planteado y a partir de ahora lo haré".

No obstante, en el análisis de la tarea 4 se registraron confusiones que ya habían tenido lugar durante en el proceso de estudio, lo cual indica que la idoneidad cognitiva *a posteriori* no ha sido adecuada. Sería deseable incluir una fase de discusión de los resultados de la evaluación, mostrando ejemplos claros sobre los distintos tipos de objetos matemáticos implicados.

6. Conclusiones

En este artículo se ha descrito, explicado y valorado un diseño aplicado a un curso de formación de profesores de matemática, para desarrollar la llamada *competencia de análisis ontosemiótico*. La herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, propuesta en el marco del EOS, ha permitido iniciar a los estudiantes en el logro del desarrollo de dicha competencia siendo el factor tiempo un condicionante fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas que se propone permite centrar la atención en la dialéctica que existe entre los objetos ostensivos y los objetos ideales o abstractos (esto es, objetos no ostensivos) implicados necesariamente en la solución comprensiva y competente de las tareas. Se muestra que el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas operativas y discursivas, como también el progreso en la tarea.

Un desafío es determinar el posible rango de orientación epistemológica y el tipo de conocimiento matemático que una herramienta puede permitirse, y elegirlas apropiadamente para situaciones pedagógicas (Leung & Bolite-Frant, 2015, p. 195). En este sentido, los diferentes problemas matemáticos elementales en torno a diferentes tipos de visualizaciones y uso de diagramas (similares a las tareas presentadas) se están experimentando con diversos grupos de estudiantes. Los resultados y las reflexiones proporcionadas nos permiten considerar que estas actividades son un reto para los futuros profesores, siendo conflictiva la identificación y la discriminación de los diferentes tipos de objetos y significados. Esto se debe a que los estudiantes en general no están habituados a un cierto nivel de actividad metacognitiva. Se considera necesario implementar más ciclos, ampliar el diseño y mejorar la aplicación.

El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje.

7. Referencias bibliográficas

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C., & Sánchez, E. (2015). Prospective teachers' semiotic conflicts in computing probabilities from a two-way table. *Mathematics Education, 10*(1), 3-16.

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C., & Sánchez, E. (2015). Prospective teachers' semiotic conflicts in computing probabilities from a two-way table. *Mathematics Education, 10*(1), 3-16.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. In J.–J. Lo, K. R. Leatham, & L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design Research: An Analysis and Critique. In L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 481-503). New York, NY: Routledge.

Cohen, S. (2004). *Teachers' professional development and the elementary mathematics classroom: Bringing understandings to light*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York, NY: Routledge.

Escobar, A. V., Romero, A. C., & Mier, M. M. (2015). Adaptation of a questionnaire to assess the epistemological beliefs of mathematics in secondary school teachers. *Revista Complutense de Educación, 26*(2), 255-273.

Fahlgren, M., & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry. *Technology, knowledge and learning, 19*, 287-315.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión, 26,* 9-25.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124.

Font, V., & Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional: El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación, 338,* 309-346.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. R. (2016). The theory of didactical suitability: networking a system of didactics principles for mathematics education from different theoretical perspectives. *Proceedings of the, 13th International Congress on Mathematical Education*, (24-31 July 2016). Hamburg, Germany: ICME.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T., & Contreras, A. (2015). *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricados en la visualización espacial y el razonamiento diagramático.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf

Husu, J., Toom, A., & Patrikainen, S. (2008). Guided reflection as a means to demonstrate and develop student teachers' reflective competencies. *Reflective Practice, 9*(1), 37-51.

Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (Eds.). (2008*). Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: the role of tools. In A. Watson, & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). New ICMI Study Series. New York: Springer.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance-a commentary. *ZDM, 48*(1-2), 219-226.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T., & Wirtz, M. (2015). Students' competencies in working with functions in secondary mathematics education-empirical examination of a competence structure model. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13,* 657-682.

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. C. Hartshorne, & P. Weiss (Eds.). Cambridge, MA: Harvard UP.

Pierce, R., & Stacey, K. (2013). Teaching with new technology: Four ‘early majority’ teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(5), 323-347.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers. The case of derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education* (accepted).

Pino-Fan, L. R., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers’ Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime, 19*(1), 71-98.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., & Velez, I. (2017). Elementary teachers’ professional development in interrelation with the context of mathematics teaching practice. *Relime, 20*(1), 1-24.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students’ types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* New York, NY: Routledge.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Sherry, D. (2009). The Role of Diagrams in Mathematical Arguments. *Foundations of Science, 14*, 59-74.

Shin, S-J., & Lemon, O. (2008). Diagrams. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Retrieved from http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/

Silverman, J., & Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), 499-511.

Vázquez-Cano, E. (2016). Teachers’ difficulties to plan, coordinate, and evaluate key competencies. An analysis from the education inspection. *Revista Complutense de Educación, 27*(3), 1061-1083.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Anexo 1
Tarea 1. Exploración inicial de significados personales

La figura adjunta muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.

1) Dibuja la vista del edificio desde atrás. Justifica la respuesta.
2) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.
3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.
4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe el procedimiento matemático en la resolución de la tarea.
5) ¿Qué es para ti una demostración matemática? Elabora una justificación matemática para la respuesta dada en la tarea.
6) Uno de los conceptos que intervienen es el de cubo, usado para indicar cada una de las piezas que componen el *edificio*.
a) Elabora al menos dos definiciones diferentes para el cubo como concepto geométrico.
b) Indica otros usos o significados que puede tener la palabra *cubo*.
7) Indica qué papel desempeñan las proposiciones que has identificado en la justificación de la respuesta.
8) Describe otros posibles procedimientos que se podrían aplicar para resolver la tarea.
9) Describe una posible justificación de la respuesta que podría dar un estudiante usando algún tipo de material, secuencia de representaciones u otras explicaciones.
10) La figura geométrica dada se representa como una composición de piezas de forma cúbica.
a) Identifica propiedades del cubo, como figura geométrica, que no se pueden representar de manera empírica.
b) Enuncia la tarea utilizando lenguaje natural u ordinario.

Anexo 2
Consignas de análisis ontosemiótico y tareas matemáticas propuestas

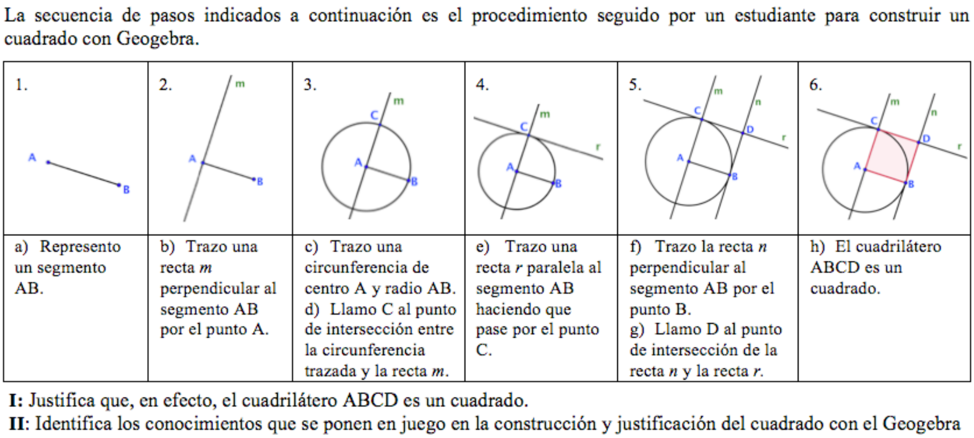
Para las siguientes tres tareas matemáticas, realiza las siguientes actividades:

1) Resuelve la tarea matemática
2) Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas.
3) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y cada una de las prácticas elementales, completando la tabla incluida a continuación (añade las filas necesarias).

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Significados referidos en las prácticas *(Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

Tarea 2. Construcción de un cuadrado con GeoGebra.

La secuencia de pasos indicados a continuación es el *procedimiento seguido por un alumno* para construir un cuadrado con Geogebra.



La secuencia de pasos indicados a continuación es el procedimiento seguido por un estudiante para construir un cuadrado con Geogebra.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
a) Represento un segmento AB.	b) Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A.	c) Trazo una circunferencia de centro A y radio AB. d) Llamo C al punto de intersección entre la circunferencia trazada y la recta *m*.	e) Trazo una recta *r* paralela al segmento AB haciendo que pase por el punto C.	f) Trazo la recta *n* perpendicular al segmento AB por el punto B. g) Llamo D al punto de intersección de la recta *n* y la recta *r*.	h) El cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

I: Justifica que, en efecto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.
II: Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la construcción y justificación del cuadrado con el Geogebra

a) Justifica que, en efecto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Tarea 3. Fracciones y diagrama de áreas

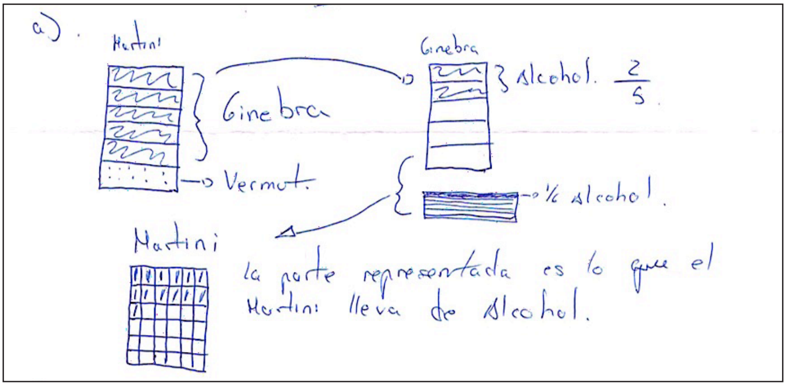
Un alumno resuelve el siguiente problema:

<u>Problema:</u>

Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol.

¿Qué fracción de alcohol lleva un Martini? Resuelve el problema usando un diagrama de áreas.

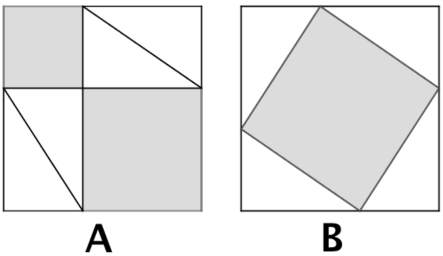
Solución:



a) ¿Es correcta la solución dada por el alumno? Justifica la respuesta.

Tarea 4. Relación entre áreas de figuras planas

Dadas las siguientes figuras:



a) *¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B?*

b) *¿Cómo se puede usar esta relación para probar el teorema de Pitágoras?*